Лекция 10. Ортонормированные базисы вейвлетов. Кратномасштабный анализ

1. Базис Хаара

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, [0, 1/2) \\ -1, [1/2, 1) \end{cases}, \quad \|\psi\|^2 = 1, \ \langle \psi_{m,n}, \psi_{m',n'} \rangle = 0, \quad (m,n) \neq (m',n')$$

Проверим ортонормированность.

$$\psi_{m,n} : a_0 = 2, b_0 = 1, \ \psi_{m,n} = 2^{-m/n} \psi\left(2^{-m} - n\right)$$

2. Базис Литлвуда – Пэли

Является аналогом базиса Хаара в спектральном пространстве:

$$\psi(\xi) = \begin{cases} 1, \pi \leq |\xi| \leq 2\pi \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Отсюда можем определить исходную функцию:

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ix} \left[e^{ix\xi} \Big|_{-2\pi}^{2\pi} - e^{ix\xi} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \frac{1}{\pi x} [\sin(2\pi x) - \sin(\pi x)].$$

3. Базис сплайнов Баттла-Лемарье.

Кратномасштабный анализ

Кратномасштабный анализ есть последовательность вложенных пространств в L_2 , удовлетворяющие следующим условиям:

$$\ldots V_3 \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset V_{-3} \ldots \quad (1)$$

$\{V_j\}, V_j \subset L_2(R)$

$$\overline{\bigcup V_j} = L_2(R) \qquad (2)$$

$$\bigcap_{j \in Z} V_j = \{0\} \qquad (3)$$

$$f \in V_0 \Leftrightarrow f\left(2^j \cdot\right) \in V_j \qquad (4)$$

$$f \in V_0 \Leftrightarrow f(\cdot - n) \in V_0, \forall n \in Z \qquad (5)$$

$\exists \varphi \in V_0 \quad \{\varphi_{0,n}\} = \{\varphi(. - n)\}$ образуют ортонормированный базис в пространстве V_0 (6).

Функция φ называется порождающей или масштабирующей функцией.

Справедлива следующая теорема:
Если цепочка замкнутых подпространств $\{V_j\}$ образует кратномастшабный анализ, то
Существует ортонормированный базис вейвлетов, $\{\psi_{j,ki} : j,k \in Z\}$ в $L_2(R)$, такой, что оператор проектирования на подпространство V_{j-1} представляется в виде:

$$P_{j-1} = P_j + \sum_k \langle \cdot, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \qquad (7)$$

Одним из возможных вариантов является совокупность функций, порождаемых функцией
$\psi(\xi) = e^{i\xi/2}\overline{m_0(\xi/2+\pi)}\varphi(\xi/2)$, где m_0 – 2π периодическая функция:

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h_n e^{-in\xi}, \text{где } h_n = \langle \varphi, \varphi_{-1,n} \rangle, \qquad (14)$$

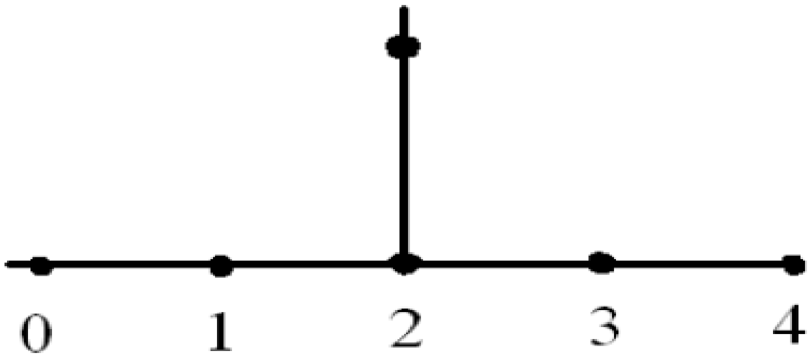
$$\sum_n |h_n|^2 = 1$$

Построение вейвлетов с компактными носителями

1 способ. Построение вейвлетов опирается на масштабирующее выражение

$\varphi(x) = \sqrt{2}\sum h_n \varphi(2x-n)$

Можно реализовать итерационный процесс



Задать значение в одной точке, а потом пересчитать все остальные. Так для N=2 получаем выражение для первого приближения

$$\varphi^{(1)}(x) = \sqrt{2}\sum h_n \varphi^{(0)}(2x-n)\Big|_{N=2} =$$

$$\sqrt{2}\left[h_0\varphi^{(0)}(2x) + h_1\varphi^{(0)}(2x-1) + h_2\varphi^{(0)}(2x-2) + h_3\varphi^{(0)}(2x-3)\right]$$

Можно использовать и построить рекурсивное соотношение для полуцелых точек.

2-ой способ. **Каскадный алгоритм.**

Утверждение 1. Если f непрерывна на R, то для любого x $\in$ R

$$\lim_{j\to\infty} 2^j \int dy f(x+y)\overline{\varphi(2^j y)} = f(x).$$

Если f равномерно непрерывна , то сходимость равномерна относительно x .

Если f Гельдерова, то

$$\left| f(x) - 2^j \int dy f(x+y)\overline{\varphi(2^j y)} \right| \le C 2^{-j\alpha}$$

Предположим, что φ сама непрерывна или непрерывна по Гельдеру с показателем α. Пусть $x = 2^{-J}K$. Тогда в силу доказанного

$\varphi(x) = \lim_{j\to\infty} 2^j \int dy \varphi(2^{-J}K + y)\overline{\varphi(2^j y)} =$ согласно определению вейвлета φ

$\varphi_{-j}(y) = 2^{j/2}\varphi(2^j y)$, продолжая равенство, получаем:

$$= \lim_{j\to\infty} 2^{j/2} \int dz \varphi(z)\overline{\varphi_{-j,2^{j-J}K}(z)} = \lim_{j\to\infty} 2^{j/2}\left\langle \varphi, \varphi_{-j,2^{j-J}K} \right\rangle.$$

Отсюда $\left| \varphi(2^{-J}K) - 2^{j/2}\left\langle \varphi, \varphi_{-j,2^{j-J}K} \right\rangle \right| \le C 2^{-j\alpha}$. Определим $\eta_j^\varepsilon(x)$: на отрезке $\left[2^{-j}(n-1/2), 2^{-j}(n+1/2)\right]$ равной $2^{j/2}\left\langle \varphi, \varphi_{-j,n} \right\rangle$. Можно показать, что этой кусочно-постоянной функцией можно приблизиться к вейвлету φ.

Утверждение 2. Если φ непрерывна по Гельдеру с показателем α, то существует C>0,
$j_0 \in N$, что при $j>j0$ выполнено:

$$\left\|\varphi-\eta_j^0\right\|_{L\infty} \le C2^{-\alpha j}, \left\|\varphi-\eta_j^1\right\|_{L\infty} \le C2^{-\alpha j}$$

Это утверждение позволяет определить следующий алгоритм вычисления вейвлета φ(x), называемый каскадным.

1) Задаем φ0 в целых точках: 0, 0,0, …0,1,0,….
2) Вычисляем $\eta^0_j(2^{-j}n)$, для целых n.

Для n=2k $\eta_j\left(2^{-j}(2K)\right)=\sqrt{2}\sum_l h_{2K-2l}\eta_{j-1}\left(2^{-j+1}l\right)$,

Для n=2k+1 $\eta_j\left(2^{-j}(2K+1)\right)=\sqrt{2}\sum_l h_{2K+1-2l}\eta_{j-1}\left(2^{-j+1}l\right)$.

3) В промежуточных точках интерполируем, если есть необходимость.